

МЕТОД КРУПНОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО МОДЕЛИ СМАГОРИНСКОГО

© Ю.В. Юрокина

Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), Россия
140160, Московская обл., г. Жуковский-3, НИО-1 ЦАГИ, факс: (095)911-00-19

Описан численный метод для прямого моделирования крупномасштабной турбулентности, основанный на модели Смагоринского для подсеточной турбулентности. Метод содержит ряд оригинальных элементов. Представлены результаты тестовых расчетов сверхзвукового слоя смешения с использованием этого метода.

NUMERICAL METHOD FOR LARGE-SCALE TURBULENCE ON SMAGORINSKY MODEL

J.V. Yurokina

Central aerohydrodynamic institute (TsAGI), Russia
140160, Moscow region, Zhukovsky-3, TsAGI, Propulsion Department, fax: (095)911-00-19

Numerical method for the direct simulation of large-scale turbulence based on Smagorinsky model for the subgrid turbulence is described. The method contains a number of interesting ideas. Results of test calculations of supersonic shear layer with this method are presented.

Условные обозначения

t – время

x_k ($k=1,2,3$) x, y, z – декартовы координаты

$\vec{r} = (x; y; z)^T$ – радиус-вектор точки наблюдения

V – объем

u_k ($k=1,2,3$) u, v, w – компоненты вектора скорости

c – скорость звука

M – число Маха

ρ – плотность

p – давление

T – температура

γ – показатель адиабаты

τ_{ij} – тензор вязких напряжений

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \text{тензор скоростей деформации}$$

$$\tilde{S} = \sqrt{2 \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}} - \text{скорость деформации}$$

$d = S_{ii}$ – дивергенция вектора скорости деформации

μ – динамический коэффициент молекулярной вязкости

μ_T – динамический коэффициент турбулентной вязкости

C_μ – эмпирический коэффициент в формуле для μ_T

q – характерный масштаб турбулентных пульсаций скорости

ω – характерная частота турбулентных пульсаций

\tilde{R}_{ij} – турбулентные подсеточные напряжения

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} \tilde{R}_{ii} - \text{кинетическая энергия турбулентности}$$

$$M_t = \frac{\sqrt{2\tilde{k}}}{c} - \text{турбулентное число Маха}$$

Δ – ширина фильтра

h_i – шаг расчетной сетки вдоль оси x_i

δ_{ij} – оператор Кронекера

$b(x)$ – толщина слоя смещения

\bar{f} – осреднение по Рейнольдсу величины f

$f' = f - \bar{f}$ – флуктуация величины f при осреднении по Рейнольдсу

\tilde{f} – осреднение по Фавру величины f

$f'' = f - \tilde{f}$ – флуктуация величины f при осреднении по Фавру

1. Введение

Хорошо известно, что для получения необходимых характеристик сложных трехмерных турбулентных течений наряду с экспериментальными исследованиями нужно проводить также численные исследования этих течений. Это связано как с относительной трудоемкостью и высокой ценой хорошего эксперимента, так и с принципиальной невозможностью получить на основе эксперимента полную картину течения, а не только данные в каких-то отдельных точках. Вот почему развитию методов компьютерного вычисления турбулентных течений во всем мире уделяется большое внимание. Наиболее оптимальными являются те методы, которые работают с полной трехмерной системой уравнений Навье-Стокса, так как именно она способна достоверно описать все нюансы реального турбулентного течения.

В настоящее время существуют три подхода к численному решению системы уравнений Навье-Стокса. Наиболее распространенным является подход, основанный на осреднении уравнений по времени и последующем замыкании этой системы *полуэмпирической моделью турбулентности*. Однако известно, что все подобные методы обладают одним существенным и *неустраняемым* недостатком: в них используется *осреднение по всему диапазону турбулентных движений*. Между тем в развитой турбулентности можно выделить по крайней мере два принципиально различных масштаба движений: *крупномасштабную турбулентность*, которая определяется геометрией и структурой среднего течения и потому *принципиально* не может быть описана универсальным образом, и *мелкомасштабную турбулентность*, которая является равновесной, и для которой теоретически может быть создана универсальная модель. Поскольку крупномасштабная турбулентность, которую нельзя описать универсально, включается в диапазон осреднения, константы полуэмпирической модели должны изменяться от

одного течения к другому. В случае сложных течений это создает значительные трудности: приходится подправлять константы модели, сравнивая результаты расчета и эксперимента для одного характерного течения данного класса.

Привлекательным в подобной ситуации мог бы быть второй метод – *метод прямого численного моделирования турбулентности* (direct numerical simulation, DNS), в котором используется полная, не осредненная по времени нестационарная система уравнений Навье-Стокса и, следовательно, не требуется вводить никакие эмпирические константы. Но при этом ячейки сетки должны быть меньше размера самого маленького вихря (т.е. должны иметь порядок масштаба Колмогорова [1]), а это требует огромных затрат компьютерного времени и оперативной памяти компьютера.

Возможной альтернативой может быть третий метод – *метод моделирования крупномасштабной турбулентности* (LES), использующий осреднение уравнений лишь по крупным масштабам. При этом крупные вихри выявляются в расчете непосредственно, а мелкие вихри (которые, как уже отмечалось, теоретически невозможно описать универсальным образом) представлены в виде дополнительных членов в системе уравнений, для которых пишутся соответствующие замыкающие модели.

Преимущество этого метода по сравнению с методом прямого численного моделирования состоит в том, что ячейки сетки могут быть крупнее, чем при прямом численном моделировании, так как здесь необязательно, чтобы размер ячейки был меньше самых мелких вихрей; нужно лишь, чтобы турбулентные вихри, меньшие размера ячеек сетки (*подсеточная турбулентность*), принадлежали *интервалу универсального равновесия* [2]. Для столь малых масштабов из-за случайного характера турбулентного движения можно считать, что информация о геометрии и структуре среднего течения уже утрачена, и что турбулентные пульсации являются изотропными. Поэтому можно надеяться, что замыкающие модели в этом случае будут более универсальными и подходящими для более широкого класса течений.

Существуют различные варианты прямого моделирования крупномасштабной турбулентности. Наиболее развиты методы, так или иначе развивающие исторически первую модель этого класса – модель Смагоринского [3]; в этих методах для описания подсеточной турбулентности используются модели, использующие полуэмпирические константы (см., например, [4-8]). К сожалению, до сих пор не найдено такого способа описания подсеточной турбулентности, при котором эти полуэмпирические константы были бы универсальными. Поэтому возникло второе направление, которое не требует никакого эмпиризма: величины, аналогичные константам предыдущего подхода, в этом случае подправляются в ходе расчета; для этого используется сравнение расчетов на двух разных сетках [9,10].

В этом докладе представлен один из существующих подходов к моделированию крупномасштабной турбулентности. Кратко обозначен численный метод, использующийся для решения уравнений. Описанный подход к численному исследованию турбулентных течений применяется к модельной задаче о слое смешения двух сверхзвуковых потоков. Представлены результаты расчетов этой задачи на рабочей станции Alpha XL 266.

2. Описание метода моделирования крупномасштабной турбулентности

2.1. Процедура фильтрации и основные уравнения. Основная идея метода моделирования крупномасштабной турбулентности заключается в математическом разделении крупных и мелких вихрей. Эту процедуру можно осуществить посредством фильтрации; мы определяем поле крупномасштабных пульсаций следующим выражением:

$$\bar{f}(r) = \int G(r, r') f(r') dV', \quad (1)$$

где $G(r, r')$ – фильтрующая функция с характерным масштабом длины (шириной фильтра) Δ . В данной работе используется ящичный фильтр

$$G(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{V}, & |r_i - r'_i| < \frac{h_i}{2}, \\ 0, & \text{в остальном пространстве.} \end{cases}$$

что соответствует осреднению по объему ячейки (здесь V – объем ячейки).

Эта процедура фильтрации применяется к системе уравнений Навье–Стокса. Для всех параметров, кроме P и ρ используется осреднение по Фавру: $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$, для P и ρ – осреднение (1). При этом исходная система преобразуется к виду

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\mathbf{F}}_k^{conv} + \bar{\mathbf{F}}_k^{diff})}{\partial x_k} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (2)$$

($k=1,2,3$; всюду в статье предполагается суммирование по повторяющемуся индексу). В этом уравнении:

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{\rho}; \bar{\rho} \tilde{u}_i; \bar{\varepsilon}]^T;$$

$$\bar{\mathbf{F}}_k^{conv} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_k \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k + \bar{p} \delta_{ik} \\ (\bar{\varepsilon} + \bar{p}) \tilde{u}_k \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{F}}_k^{diff} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \tilde{R}_{ik} - \bar{\tau}_{ik} \\ (\bar{\rho} \tilde{R}_{ik} - \bar{\tau}_{ik}) \tilde{u}_i + (\bar{\rho} \tilde{\sigma}_k - \bar{q}_k) + K_k \end{bmatrix}.$$

В этих формулах знак "–" означает осреднение по Рейнольдсу, знак "+" – осреднение по Фавру [1]. Дальше в статье знаки осреднения опускаются.

Для замыкания системы уравнений (2) мы используем: уравнение состояния; выражение для полной энергии газа; выражение для внутренней энергии газа на единицу массы (она аппроксимируется квадратичной функцией от температуры); выражение для компонент тензора вязких напряжений; формулу Сазерленда для коэффициента молекулярной вязкости, выражение для потоков тепла, обусловленных теплопроводностью.

2.2. Способ моделирования мелкомасштабной (подсеточной) турбулентности. Также для замыкания системы уравнений (2) используется модель градиентной диффузии для подсеточных турбулентных напряжений:

$$\bar{\rho} \tilde{R}_{ik} = \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{k} \delta_{ik} - 2\mu_T \left[\tilde{S}_{ik} - \frac{1}{3} \tilde{d} \delta_{ik} \right]. \quad (3)$$

Турбулентная вязкость вычисляется по формуле Смагоринского:

$$\mu_T = \bar{\rho} \cdot C_\mu \Delta^2 \tilde{S}. \quad (4)$$

В эту формулу входит Δ – характерная ширина фильтра, которая имеет порядок местного шага сетки. За эту величину обычно принимают

$$\text{либо } \Delta = (h_1 h_2 h_3)^{1/3},$$

$$\text{либо } \Delta = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{1/2},$$

$$\text{либо } \Delta = \min(h_1, h_2, h_3).$$

В данной работе используется третий вариант.

Таким образом, турбулентная вязкость определяется только теми турбулентными пульсациями, размер которых сопоставим с шагом сетки (или меньше шага сетки), т.е. подсеточной турбулентностью.

Приводимые в литературе значения константы C_μ варьируются от 0.005 до 0.026 в зависимости от типа рассматриваемого течения [5,8]. В ходе описываемой работы предполагалось произвести выбор оптимальной константы конкретно для рассматриваемого течения.

2.3. Моделирование кинетической энергии подсеточной турбулентности. В формулу (3) для турбулентных подсеточных напряжений непосредственно входит \tilde{k} – кинетическая энергия мелкомасштабной турбулентности. Следовательно, ее необходимо моделировать.

Один из способов избежать этого – включить член $\tilde{R}_{kk}/3$ в давление, т.е. заменить $\bar{p} + \tilde{R}_{kk}/3$ на \bar{p} и не отличать молекулярное давление от "турбулентного" [7,9]. Но привлекательней все же была бы попытка непосредственного вычисления величины \tilde{k} .

В данной работе предложен следующий алгебраический способ моделирования данной величины.

Турбулентные подсеточные напряжения должны быть прямо пропорциональны \tilde{k} :

$$\tilde{R}_{ik} = \alpha_{ik} \tilde{k}. \quad (5)$$

Это следует из того, что основной вклад в \tilde{k} дают наибольшие из подсеточных вихрей, они же отвечают, в основном, за перенос импульса, обусловленный разностью в крупномасштабных скоростях \tilde{u} в соседних ячейках. Аналогичные рассуждения имеют место в модели переноса крупными вихрями для напряжений Рейнольдса.

Сравнив эту формулу с (3), приходим к выводу, что должна иметь место связь:

$$\mu_T \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} = \alpha_{ik} \bar{\rho} \tilde{k}. \quad (6)$$

Если предположить, что мелкие (подсеточные) вихри лежат в инерционном интервале, то подсеточная турбулентность имеет равновесную структуру: ее порождение, т.е. перенос энергии по каскаду вихрей от крупных к мелким, равно ее диссипации вязкостью $\bar{\rho} \tilde{\epsilon}$. Порождение мелкомасштабной турбулентности

$$P = -\bar{\rho} \tilde{R}_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}.$$

Подставляя в это выражение (5) и (6), получим:

$$P = -c_{ik} \alpha_{ik} \frac{\bar{\rho}^2 \tilde{k}^2}{\mu_T} = c \cdot \frac{\bar{\rho}^2 \tilde{k}^2}{\mu_T}, \quad c > 0.$$

Так как скорость диссипации энергии мелкомасштабной турбулентности зависит от величины этой энергии и от характерного размера мелких вихрей, то из соображений размерности

$$\tilde{\epsilon} = c_\epsilon \frac{\tilde{k}^{3/2}}{\Delta},$$

где Δ – характерная ширина фильтра, связанная с размерами ячейки.

Тогда условие $P - \bar{\rho} \tilde{\epsilon} = 0$ дает искомую формулу для \tilde{k} :

$$\tilde{k} = C \left(\frac{\mu_T}{\bar{\rho} \Delta} \right)^2. \quad (7)$$

Величина константы C пересчитана из [8] и составляет $C=45,833$.

Имея выражение для кинетической энергии мелкомасштабной турбулентности, мы можем вычислять ее градиенты и моделировать ее молекулярный и турбулентный потоки (входящие в осредненное уравнение для энергии) точно так же, как это делается при осреднении по времени – например, следующим образом:

$$\overline{\rho k u_i''} - \sum_{j=1}^3 \overline{\tau_{ij} u_j''} = - \sum_{j=1}^3 (\mu_T + \mu) (a_{ij} + \delta_{ij}) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}.$$

Заметим, что если бы мы непосредственно не моделировали величину \tilde{k} , а считали бы ее включенной в давление, то нам пришлось бы отказаться и от моделирования ее диффузионного потока, т.е. этот член, входящий в осредненное уравнение для энергии, был бы попросту проигнорирован.

3. Численный метод

Можно заметить, что при фильтрации полной трехмерной системы уравнений Навье-Стокса получается система уравнений крупномасштабного турбулентного движения, которая по форме совпадает с осредненной по времени системой Навье-Стокса. Поэтому для численного решения этой системы был выбран тот же численный метод, что и метод, предложенный авторами в [11] для численного интегрирования полной, трехмерной, осредненной по Фавру системы уравнений Навье-Стокса. Характерными компонентами используемого в настоящей работе явного численного метода являются:

- явная монотонная схема Годунова-Колгана-Родионова [12-15] для аппроксимации конвективных потоков, имеющая 2-й порядок аппроксимации по всем переменным. Применяется оригинальное итерационное нелинеаризованное решение задачи Римана с учетом зависимости термодинамических свойств газа от температуры. Для достижения 2-го порядка аппроксимации по пространству используется принцип минимальных значений производных (ПМЗП) [12]. Этот принцип является русским аналогом широко используемого TVD-подхода [16]. Применяется оригинальная формулировка этого принципа в криволинейной системе координат, связанной с сеточными линиями. Второй порядок аппроксимации достигается с помощью процедуры "предиктор-корректор";

- явная аппроксимация 2-го порядка для диффузионных потоков (модифицированный вариант схемы центральных разностей) [11].

Детальное описание этого явного численного метода можно найти в [11].

4. Способ задания стохастических граничных и начальных условий

При численном моделировании крупномасштабной турбулентности параметры, которые мы вычисляем в каждой ячейке – мгновенные, случайные величины. Поэтому при постановке граничных и начальных условий мы должны учитывать, что эти параметры колеблются по какому-то определенному закону вокруг средних величин. Разумно предположить, что они подчиняются гауссову закону распределения по времени с известным средним значением, получающимся из расчета, использующего $(q-\omega)$ – модель, и дисперсией, определению которой мы посвятим оставшуюся часть этого раздела.

В каждой ячейке мгновенное значение параметра крупномасштабного поля турбулентности можно разделить на сумму некоего среднего по времени значения и пульсационного $\tilde{f} = \bar{f} + \tilde{f}'$.

Средние величины \bar{f} предполагаются известными из расчета, использующего $(q-\omega)$ – модель, или из каких-либо других соображений. Поэтому займемся моделированием пульсаций \tilde{f}' . Знак \sim будем в дальнейшем для простоты опускать, т.е. писать f' вместо \tilde{f}' .

При определении случайного значения пульсации в данной ячейке мы должны учитывать наличие соседних ячеек из-за существования корреляции

$$R(\Delta\bar{\eta}, t) = R(0,0) \exp \left[-\frac{\pi \cdot \Delta\bar{\eta}^2}{L^2} - \omega^2 t^2 \right], \quad (8)$$

где $R(\Delta\bar{\eta}, t) = \overline{f'(\Delta\bar{\eta}, t) f'(0,0)}$, L – некоторый характерный масштаб, указывающий на быстроту спада влияния соседних ячеек, ω – характерная частота пульсаций. В настоящей работе за L берется удвоенный размер ячейки, так что имеет смысл учитывать лишь ближайших соседей, а корреляция с более дальними ячейками уже ничтожно мала.

Рассмотрим одномерный случай, который без труда можно также обобщить на двумерный и трехмерный.

Если учитывать влияние лишь ближайших соседей, то для каждой ячейки мы можем записать:

$$f'_j = f'_{j,j} + f'_{j,j-1} + f'_{j,j+1}, \quad (9)$$

где $f'_{j,j}$ – пульсация в данной ячейке j , которая была бы при отсутствии соседних ячеек; $f'_{j,j-1}, f'_{j,j+1}$ – добавки, обусловленные соседними ячейками $(j-1), (j+1)$. Возводя это равенство в квадрат и производя осреднение, получим:

$$\overline{f_j'^2} = \overline{f_{j,j}'^2} + \overline{f_{j,j-1}'^2} + \overline{f_{j,j+1}'^2}. \quad (10)$$

Здесь учтено, что всевозможные комбинации типа $\overline{f_{j,j-1}' f_{j,j+1}'}$ равны нулю. Величина полной дисперсии $\overline{f_j'^2}$ известна: она определяется по заданной интенсивности крупномасштабных пульсаций (см. об этом ниже).

Далее, воспользовавшись формулой (8) и учитывая, что мы рассматриваем один и тот же момент времени, т.е. сдвиг по времени t равен нулю, можно записать

$$\overline{f_{j,j+1}'^2} = \overline{f_{j+1,j+1}'^2} \exp \left[-\frac{\pi \Delta\eta^2}{L^2} \right] = a_{j,j+1} \overline{f_{j+1,j+1}'^2}, \quad (11)$$

где $\Delta\eta$ – расстояние между ячейками j и $j+1$, L – характерный линейный масштаб.

Записав равенство (10) для каждой ячейки и воспользовавшись формулой (11), получим систему типа:

$$\overline{f_{j,j}'^2} + a_{j,j+1} \overline{f_{j+1,j+1}'^2} + a_{j,j-1} \overline{f_{j-1,j-1}'^2} = \overline{f_j'^2},$$

где количество уравнений равно количеству неизвестных и равно количеству ячеек, для которых ставится соответственное граничное и начальное условие.

Решая эту систему линейных уравнений, находим дисперсии $\overline{f'_{j,j}{}^2}$, $\overline{f'_{j+1,j+1}{}^2}$, $\overline{f'_{j-1,j-1}{}^2}$ и затем $\overline{f'_{j,j+1}{}^2} = a_{j,j+1} \overline{f'_{j+1,j+1}{}^2}$ и $\overline{f'_{j,j-1}{}^2} = a_{j,j-1} \overline{f'_{j-1,j-1}{}^2}$.

Затем, зная, что пульсации распределены по времени по закону Гаусса с нулевым средним значением и известной дисперсией, находим с помощью генератора случайных чисел конкретное значение пульсаций $f'_{j,j}$, $f'_{j,j-1}$, $f'_{j,j+1}$; далее по формуле (9) находим полное значение пульсации f'_j в каждой ячейке и затем, прибавляя к мгновенному значению пульсаций среднее значение параметра, получаем искомое мгновенное значение параметра в каждой ячейке.

Описанная методика используется для определения мгновенных значений трех компонент скорости; при этом принимается, что $\overline{u_j'^2} = \overline{v_j'^2} = \overline{\omega_j'^2} = \overline{f_j'^2}$. Полную дисперсию $\overline{f_j'^2}$ в каждой ячейке мы можем вычислить, исходя из следующих соображений.

Определим число Маха крупномасштабных турбулентных пульсаций относительно среднего по времени значения следующим образом: $M_T = \sqrt{\overline{u_j'^2} + \overline{v_j'^2} + \overline{\omega_j'^2}} / c$, откуда $\overline{f_j'^2} = (\overline{u_j'^2} + \overline{v_j'^2} + \overline{\omega_j'^2}) / 3 = (M_T c)^2 / 3$. Величина M_T задается; обычно она берется из интервала $0.1 \div 0.5$. c – скорость звука в ячейке, она может быть вычислена.

Зная значение пульсаций скорости, можно найти значение пульсаций давления и плотности, пользуясь т.ак называемой сильной аналогией Рейнольдса [17].

Будем считать, что пульсация полной энергии газа равна нулю:

$$\varepsilon = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p + \rho \frac{u^2 + v^2 + \omega^2}{2} \right)' = 0.$$

Отсюда

$$p' = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \rho \left(\frac{u^2 + v^2 + \omega^2}{2} \right)'$$

(пренебрегаем относительными значениями пульсации плотности по сравнению с относительными значениями пульсаций компонент скорости). В этой формуле

$$(f^2)' = f^2 - \overline{f^2} = (\overline{f} + f')^2 - \sqrt{(\overline{f} + f')^2} = 2\overline{f}f' + \overline{f^2} - \overline{f^2}.$$

Поскольку все эти значения нам известны, то мы можем найти пульсации давления и через них пульсации плотности $\rho' = \gamma p' / c^2$ в каждой ячейке.

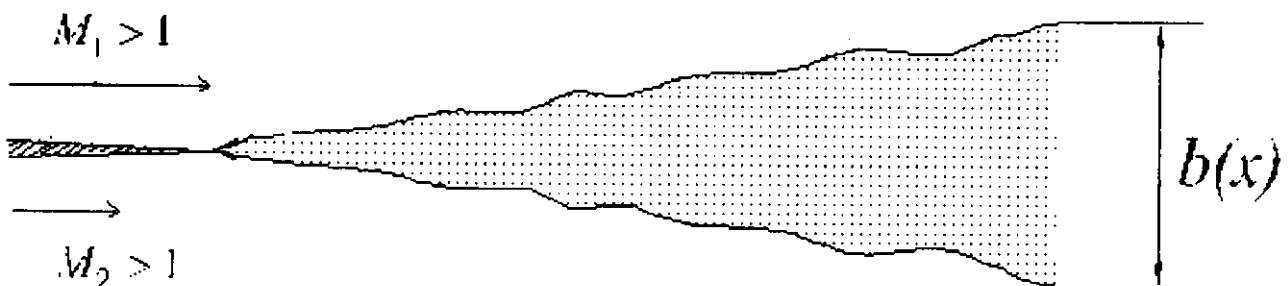


Рис.1. Плоский слой смешения

Полное значение плотности и давления получается аналогично суммированием мгновенного значения пульсаций и среднего значения.

При постановке граничных условий в качестве средних значений параметров берутся заданные параметры потока, втекающего в расчетную область; при постановке начальных условий средние значения параметров берутся из расчета течения на базе осредненной по времени системы уравнений Навье-Стокса.

5. Задача для тестирования предложенного метода

Прежде чем применять описанный выше метод к трехмерным турбулентным течениям со сложной геометрией, необходимо проверить его адекватность на более простых тестовых задачах, для которых известны экспериментальные или теоретические результаты, и где есть возможность сравнения этих результатов с данными, полученными при расчете.

В качестве тестовой была выбрана задача о смешении двух сверхзвуковых потоков воздуха. Схема течения представлена на рис.1. Как известно, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, возникающая на тангенциальном разрыве, приводит к турбулизации потока и формированию турбулентного слоя смешения. Одной из важнейших характеристик слоя смешения является его скорость роста db/dx . Благодаря автомодельности слоя смешения его скорость роста является постоянной, не зависящей от x , величиной.

Обобщение экспериментальных данных приводит к следующей формуле:

$$\frac{db}{dx} = \left(\frac{db}{dx} \right)_i K, \quad (12)$$

где

$$\left(\frac{db}{dx} \right)_i = 0.165 \frac{|1-r|(1+\sqrt{s})}{2(1+r\sqrt{s})}, \quad r = \frac{u_2}{u_1}, \quad s = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad M_{conv} = 2 \frac{|u_1 - u_2|}{a_1 + a_2},$$

$$K = \begin{cases} 1, & M_{conv} \leq 0.4, \\ 0.4, & M_{conv} \geq 2.0, \\ 1.15 - 0.375M_{conv}, & 0.4 < M_{conv} < 2.0. \end{cases}$$

5.1. Структура сетки для расчета слоя смешения. Основная проблема, с которой сталкивается вычислитель при применении методов прямого численного моделирования с полуэмпирическим замыканием для подсеточной турбулентности, состоит в том, что необходимо отыскать такую структуру и такой шаг расчетной сетки, при которых подсеточные пульсации будут относиться к диапазону универсального равновесия. Возможными критериями, по которым можно было бы судить от том, что сетка является достаточно подробной, могут быть следующие признаки: 1) при дальнейшем сгущении сетки осредненное по времени численное решение перестает меняться или меняется незначительно; 2) в неосредненном численном решении должны присутствовать несколько уровней нестационарных случайных движений, линейные масштабы которых больше шага расчетной сетки. В конце концов была выбрана структура расчетной сетки, изображенная на рис.2.

Основная часть расчетной области, в которой должен быть получен слой смешения, представляет собой прямоугольник (на рис.2 – ВЕНК), длина которого в направлении смешивающихся потоков равна L , а ширина равна примерно $H_1 \approx 2L(db/dx)_{theory}$, где $(db/dx)_{theory}$ дается формулой (12). Вдоль продольной оси симметрии этого прямоугольника располагается слой шириной $H_0 = 1/25H_1$, покрытый в поперечном направлении равномерной сеткой из N_{min} ячеек (слой $CDIJ$ на рис.2). В этом слое развиваются начальные возмущения, которые ниже

по потоку должны превратиться в развитый турбулентный слой смешения, захватывающий большую часть прямоугольника $BEHK$. В статье [18] подчеркивается, что очень важно как можно подробнее описать именно зарождение неустойчивости. В прилегающих к нему сверху и снизу слоях ($DEHI$ и $BCJK$) строится переменная сетка из N_1 ячеек в поперечном направлении, шаг которой меняется по степенному закону таким образом, что минимальный размер ячеек совпадает с размером ячеек в слое $CDIJ$. Наконец, к прямоугольнику $BEHK$ сверху и снизу примыкают еще "буферные" области $EFGH$ и $ABKL$, назначение которых состоит в том, чтобы малые возмущения, порождаемые слоем смешения, не отражались от границ расчетной области. (Границы расчетной области FG и AL расположены под углом Маха к направлению течения.)

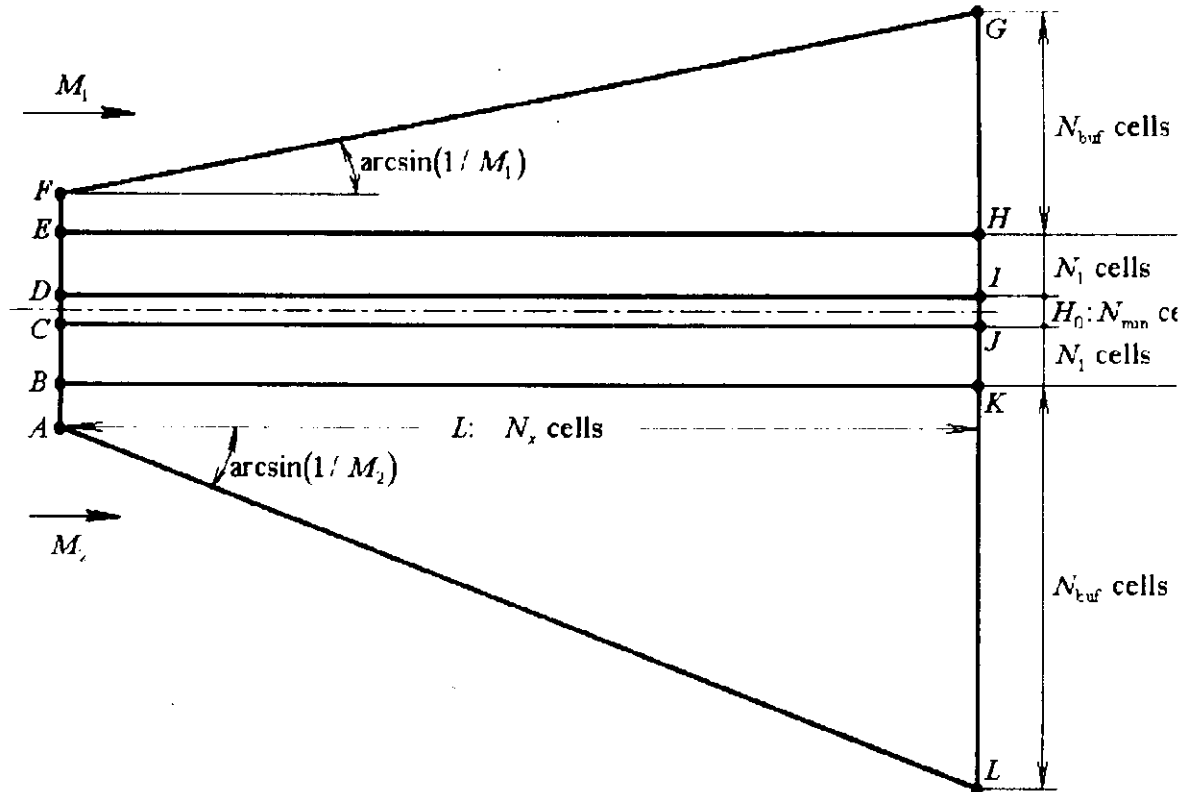


Рис.2. Структура расчетной сетки

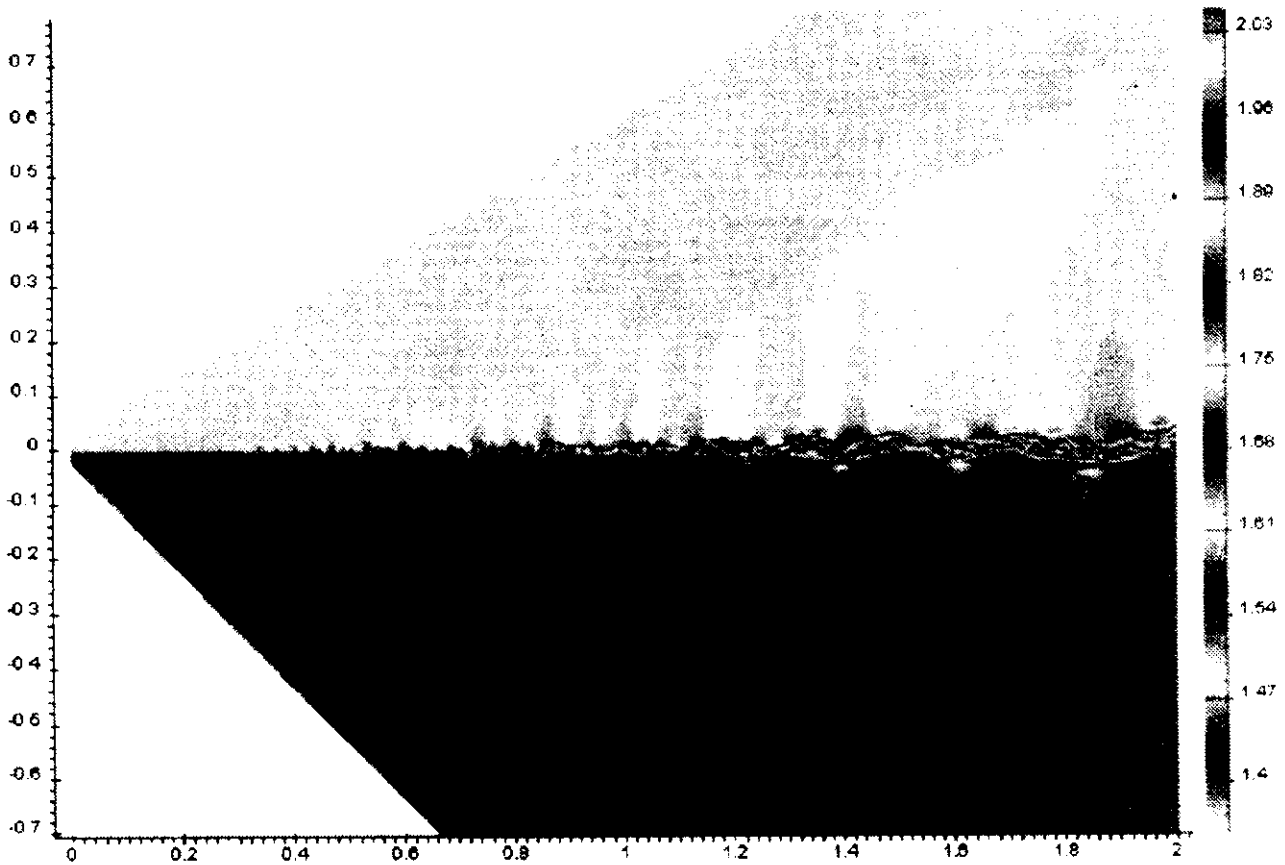
Необходимо отметить, что при разработке принципов построения расчетной сетки мы учитывали опыт численного моделирования неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в контактом разрыве между двумя медленными дозвуковыми потоками, описанный в [18].

5.2. Описание результатов тестовых расчетов. Мы опишем здесь наиболее характерные результаты расчетов слоя смешения методом прямого моделирования крупномасштабной турбулентности. Режим течения: $p=5 \cdot 10^4$ Па, $T_1=163$ К, $T_2=214$ К, $M_1=2.0$, $M_2=1.4$ ($M_{conv}=0.37$). В этом случае (см. (12)) скорость роста слоя смешения должна составлять $db/dx \sim 0.018$.

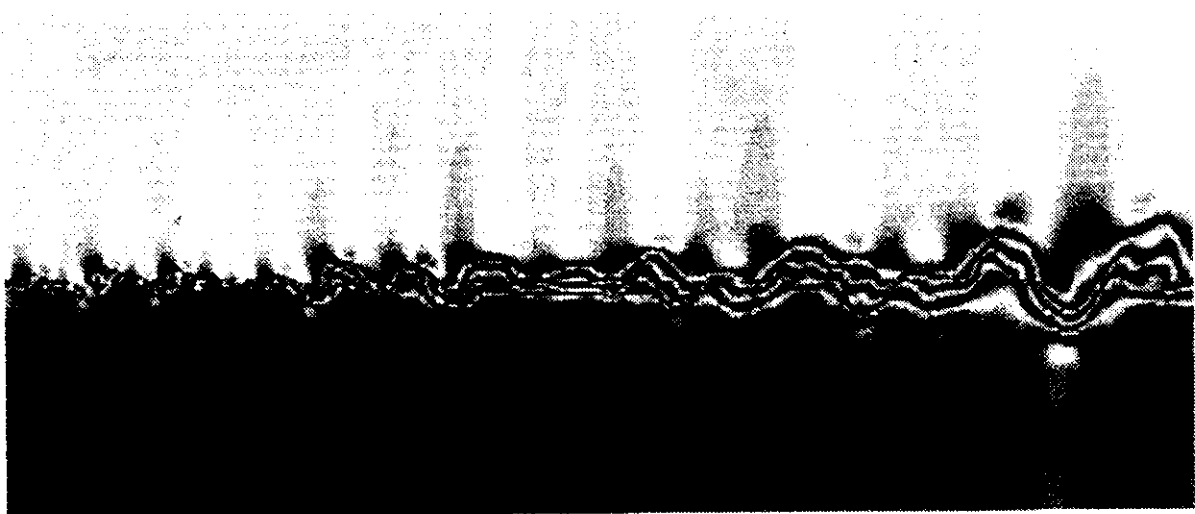
Расчеты проводились при двух значениях длины расчетной области: $L=1$ м и $L=2$ м. Количество ячеек в продольном направлении было равно соответственно $N_x=600$ и $N_x=1200$. В слое $CDIJ$ было взято $N_{min}=8$ ячеек, в слоях $DEHI$ и $BCJK$ – по $N_1=12$ ячеек, в "буферных" зонах – по $N_{buf}=10$ ячеек.

На границах FG и AL (рис.2) были заданы параметры невозмущенных потоков. На границе AF задавались параметры тех же потоков, на которые были наложены нестационарные случайные возмущения. Возмущения вычислялись по методике, описанной в разделе 3. Были рассмотрены два способа задания граничных условий на этой границе: вариант, в котором

турбулентные вихри малой интенсивности располагались вдоль всей границы AF , и вариант, в котором рассматривалось только два турбулентных вихря, примыкающих к границе раздела смешивающихся потоков и занимающих отрезок CD . Сравнение показало, что оба варианта дают похожие картины развития слоя смешения. Ниже будут представлены результаты для случая, когда на границе AF расположены только два вихря.



а)



б)

Рис.3. Мгновенное поле числа Маха

Возмущения в граничных условиях приводят к развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, и через некоторое время между смешивающимися потоками формируется развитая область сильно завихренного нестационарного течения. Пример мгновенной картины те-

чения (поля чисел Маха, случай $L=2m$) представлен на рис.3а. На рис.3б представлен фрагмент рис.3а; на этом рисунке масштаб в поперечном направлении увеличен.

В продольном направлении строится равномерная сетка. При этом желательно, чтобы удлинение ячеек сетки в слое $CDIJ$ было не очень велико. При значительном удлинении ячеек сетки неустойчивость Кельвина-Гельмгольца затухает из-за численной вязкости (см. пример на рис.4).

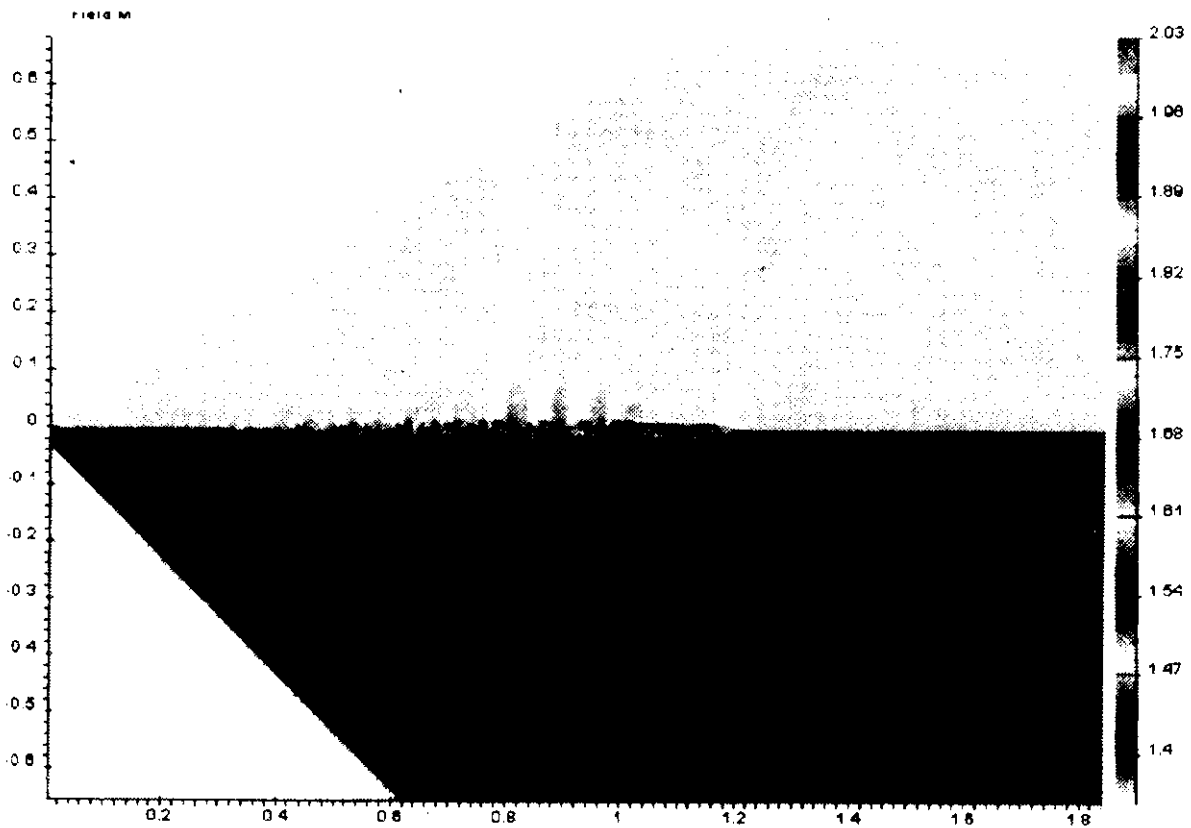


Рис.4. Затухание неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в случае грубой сетки

Расчеты прекращались, когда переставало изменяться *осредненное по времени* течение, параметры которого определялись по формуле

$$\bar{a}(\vec{r}) \approx \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} a(\vec{r}, \tau) d\tau,$$

где временной интервал осреднения T должен быть много больше, чем характерное время энергосодержащих турбулентных движений. Эксперименты показали, что для рассматриваемого случая минимальный интервал осреднения T должен составлять порядка 5 тысяч шагов по времени. Мы использовали интервал осреднения, в два раза превышающий минимально допустимый, т.е. 10 тысяч шагов по времени. На рис. 5 показано осредненное таким способом установившееся течение. Видно, что в расчетной области сформировался развитый слой смешения.

Отметим, что нестационарные малые возмущения, посылаемые областью завихренного течения в "буферные" зоны (см. рис.3), после осреднения по времени превращаются в области слабо возмущенного течения, *ограниченные акустическими характеристиками* (границы возмущенных областей на рис.5 примерно параллельны линиям EF и AB).

На рис.6 представлены распределения толщины слоя смешения вдоль оси x . Видно, что после некоторого начального участка формируется течение, близкое к автомодельному. К со-

жалению, скорость роста слоя смешения на автомодельном участке оказалась равной $db/dx \sim 0.03$, что примерно в 1.5 раза больше, чем значение, предсказываемое формулой (12).

Эта ошибка не связана с неправильным выбором коэффициента C_μ в формуле (4): попытка уменьшить коэффициент C_μ в 1.5 раза не привела к изменению скорости роста слоя смешения (см. кривые $b(x)$ для двух значений коэффициента C_μ на рис.7).

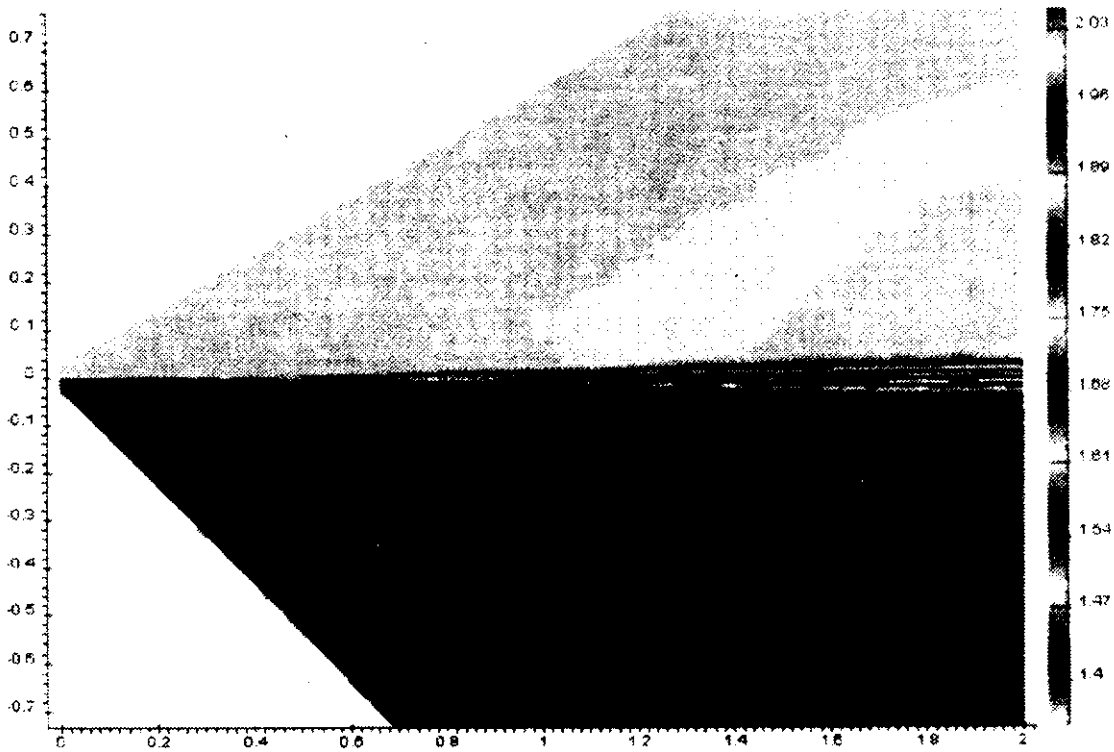


Рис.5. Осредненное по времени поле числа Маха

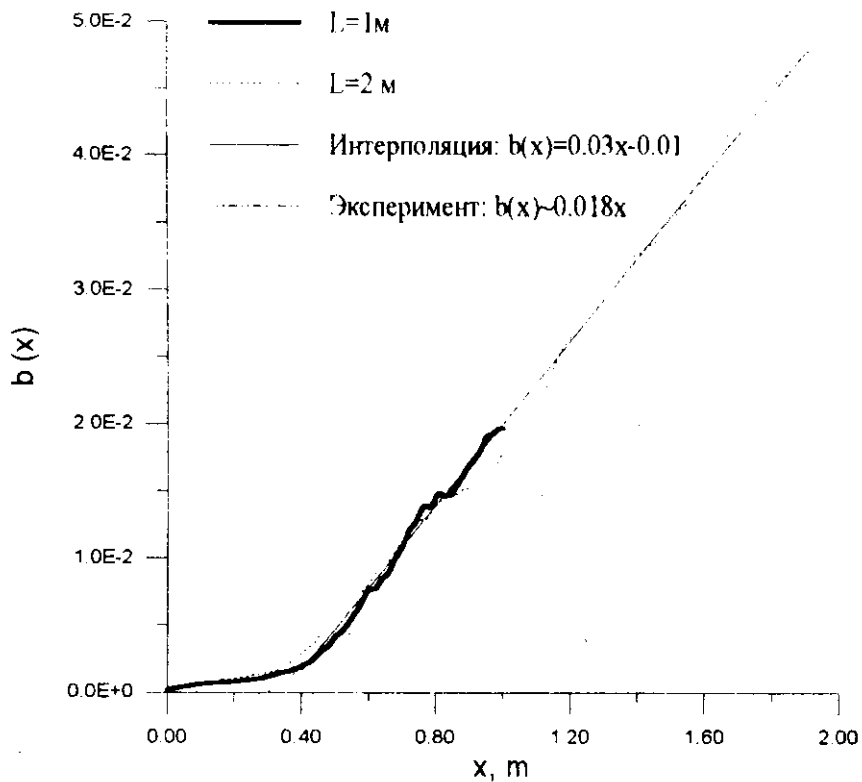


Рис.6. Распределение толщины слоя смешения

Таким образом, мы установили, что результаты, получаемые нами при расчете, не зависят от величины коэффициента в формуле для турбулентной вязкости (4). Попытка вариации константы в формуле для кинетической энергии подсеточной турбулентности (7), тоже не привела к другим результатам, хотя изменение константы было значительным – от 45.833 до 1.

Было сделано предположение, что, возможно, мы используем слишком короткую расчетную область, и слой смешения еще не успел принять правильную форму. Ведь если мы обратимся к расчетам на базе осредненной по времени системы, увидим, что на начальном участке расчетной области скорость роста слоя смешения не очень хорошо согласуется с экспериментальным значением [19], и лишь на более удаленных участках начинают достигаться хорошие результаты. Но это предположение не оправдалось. Как мы можем видеть (рис.6), увеличение расчетной области до длины $L=2$ м не уменьшило скорость роста слоя смешения.

Еще одна вероятная причина неверного значения скорости роста слоя смешения, полученного в расчете, может заключаться в том, что расчетная сетка все еще является слишком крупной. Реальная турбулентность с ее многоуровневой вихревой структурой нам в расчетах пока недоступна. Это можно видеть, например, из анализа расчетного поля течения (см. рис.3б): в расчете хорошо прослеживаются колебания поверхности раздела потоков, но никаких более мелких образований не наблюдается.

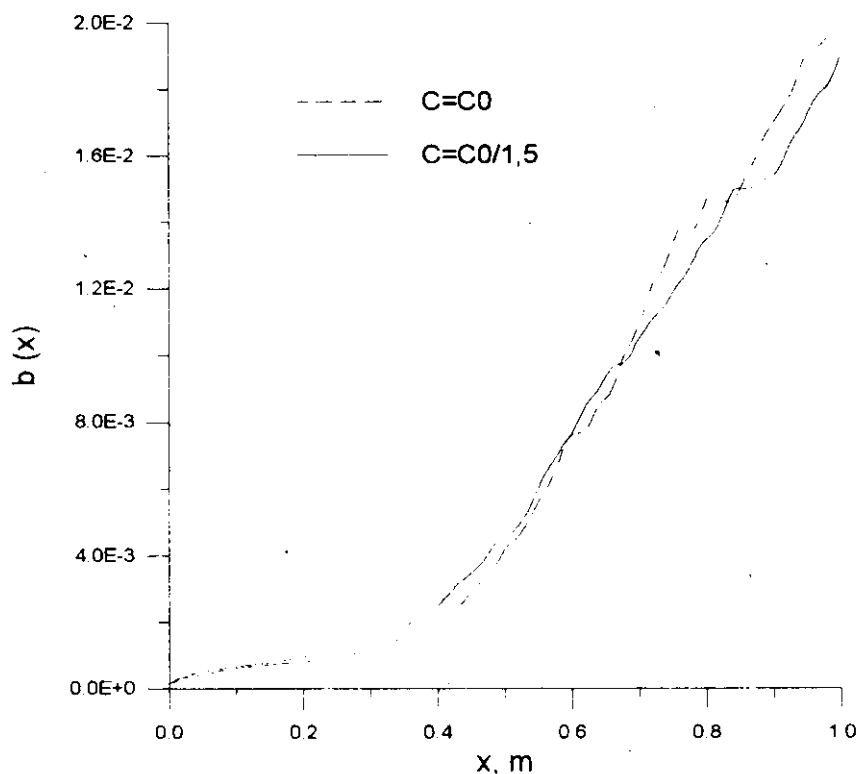
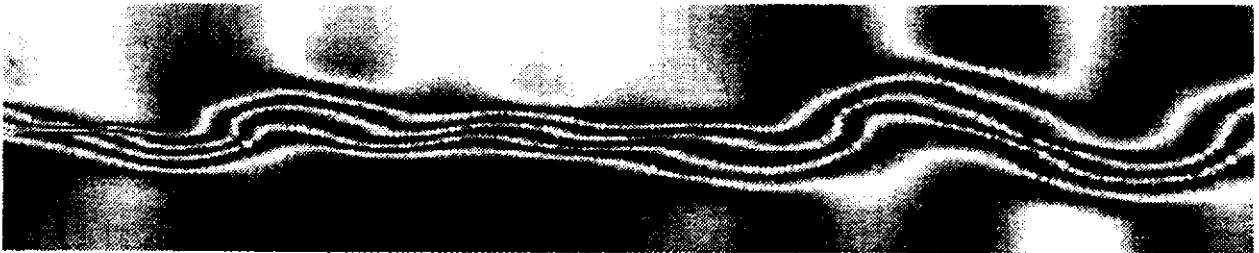


Рис.7. Расчеты для различных значений C_μ

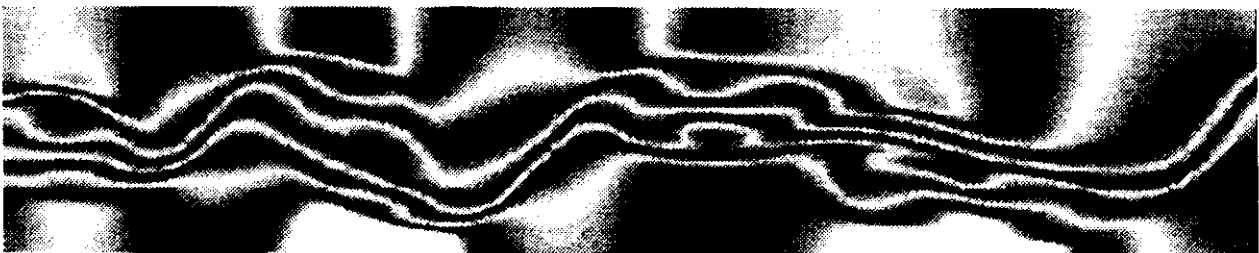
Как отмечалось во Введении, для того, чтобы вклад от подсеточной турбулентности мог быть описан при помощи простой универсальной модели типа модели Смагоринского, необходимо, чтобы масштабы, меньшие размера ячейки, попадали в интервал универсального равновесия Колмогорова. Как свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные [1], интервалу равновесия принадлежат лишь те турбулентные движения, которые соответствуют в спектре энергии турбулентности диапазону волновых чисел $k_w=2\pi/l > 10^2$, где l – характерный масштаб вихрей. Следовательно, если мы хотим, чтобы подсеточные вихри попа-

дали в интервал универсального равновесия, размер ячеек сетки должен быть в 100 раз меньше размера наиболее крупных вихрей. Размер наиболее крупных вихрей должен быть одного порядка с толщиной слоя смешения. Таким образом, мы должны обеспечить, чтобы для каждого значения x в слой, равный $b(x)$, попадало 100 ячеек. В наших расчетах мы обеспечиваем попадание лишь 15 ячеек в указанный слой. Только ячейки в слое *CDIJ* имеют ширину $2 \cdot 10^{-4}$ м и могут хоть как-то претендовать на более или менее детальное описание турбулентности. Действительно, сравнение поля течения на участке развитого слоя смешения (вторая половина расчетной области) через каждые 100 шагов по времени на протяжении 10 тысяч шагов показывает, что развитие вихревых структур наблюдается лишь в слое *CDIJ*. Как только они выходят за этот слой, то перестают развиваться и начинают просто сноситься и расти вместе с потоком. Очевидным является вывод, что для получения более правдоподобной картины турбулентного слоя смешения нам нужно дробить сетку, чтобы ширина всех ячеек в слое смешения была хотя бы порядка 10^{-4} м. Кроме того, желательно, чтобы ячейки сетки были квадратными.

К сожалению, возможности измельчения сетки весьма ограничены, если расчеты ведутся на современных персональных компьютерах. Например, расчеты при длине расчетной области $L=1$ м требуют около 50 Мб оперативной памяти компьютера; один шаг по времени занимает примерно 0.5 мин при работе на рабочей станции Alpha XL266; при этом для установления осредненного по времени течения нужно не менее 20 тысяч шагов по времени или 7 суток непрерывного счета.



а)



б)

Рис.8. Сравнение мгновенного поля числа Маха для исходной и измельченной сеток:
а) исходная сетка; б) измельченная сетка

Но, несмотря на это, был проведен расчет со следующими параметрами расчетной сетки: $L=1$ м, $H_0=8 \cdot 10^{-4}$ м, $N_x=1200$, $N_{\min}=16$, $N_l=48$. Таким образом, в слое *CDIJ* каждая ячейка уменьшилась в 4 раза (в 2 раза по ширине и в 2 раза по длине), в слоях *DEHJ* и *ABJK* – в 8 раз (соответственно в 4 раза по ширине и в 2 раза по длине), а "буферные" области были устранены (для сокращения занимаемой памяти). Такая задача занимает уже 190 Мб оперативной памяти, а каждый шаг по времени требует больше 2 мин. Более того, из-за уменьше-

ния размеров ячейки ограничение на шаг по времени ($\tau \leq h^2/(4\nu)$) стало более сильным, т.е. для получения развитой картины течения теперь требуется большее количество шагов. Результаты этого расчета и их сопоставление с расчетом на грубой сетке можно увидеть на рис.8.

Видно, что по сравнению с прошлой конфигурацией сетки, мы стали улавливать некоторые более мелкие вихри, но полученная картина еще далека от идеала. Сравнение толщины слоя смешения для этих двух конфигураций показано на рис.9.

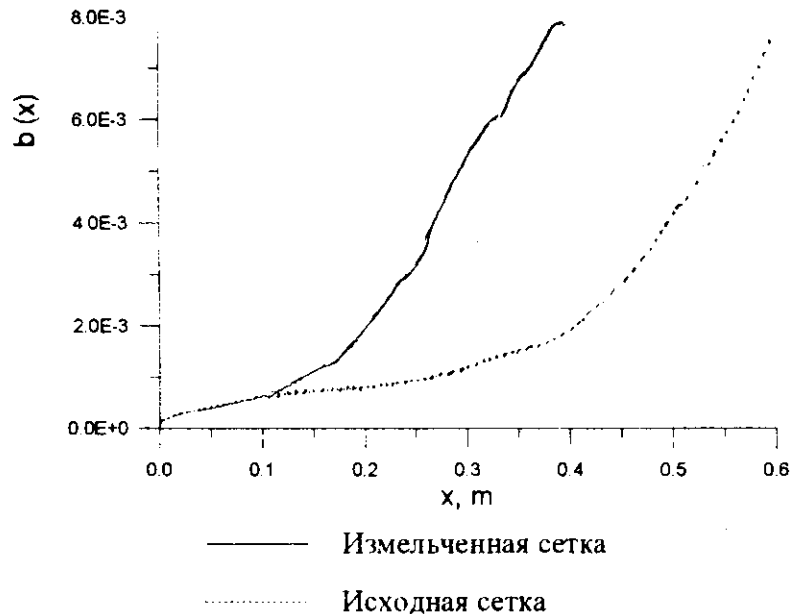


Рис.9. Толщина слоя смешения для двух конфигураций сеток

Основное отличие состоит в том, что резкий рост слоя смешения начинается теперь при меньшем значении x ($x \sim 0.1$ м, а не $x \sim 0.4$ м). Это естественно, так как при более мелкой сетке меньше также и величина турбулентной вязкости в каждой ячейке. Поэтому вихри, находящиеся ближе к началу смешения потоков, которые раньше размазывались турбулентной вязкостью, теперь начинают развиваться. Но скорость роста слоя смешения не изменилась. Это может объясняться двумя причинами.

1. Во-первых, хотя в поперечном направлении наша сетка уже является достаточно мелкой (мы обеспечили наличие около 50 ячеек в области с наиболее крупными турбулентными движениями), но в продольном направлении наши ячейки не являются квадратными. Для некоторых ячеек удлинение составляет порядка 8. Возможно, "продольная" численная вязкость приводит к неправильному развитию турбулентного слоя смешения.

2. Вторая возможная причина неправильной расчетной скорости роста слоя смешения заключается в том, что расчеты проводились в *двумерной* постановке (расчетная область содержала только одну ячейку в направлении оси z). Известно, что свойства турбулентности в двумерных и трехмерных течениях принципиально отличаются [20].

Однако несмотря на то, что меры для улучшения наших результатов являются очевидными, подобные расчеты (измельчение сетки в продольном направлении и учет трехмерности) потребуют не один месяц, если проводить их на персональном компьютере.

6. Выводы

1. Предложен численный метод для прямого моделирования крупномасштабной турбулентности, основанный на модели Смагоринского для подсеточной турбулентности. Метод содержит ряд оригинальных элементов, в том числе: 1) способ непосредственного вычисления кинетической энергии мелкомасштабной (подсеточной) турбулентности и ее диффузионного и

турбулентного потоков; 2) алгоритм постановки случайных граничных условий с учетом корреляции турбулентных пульсаций в каждой ячейке с пульсациями в соседних ячейках на базе заданной корреляционной функции.

2. Проведены расчеты модельной задачи о турбулентном смешении двух сверхзвуковых потоков методом осреднения по времени. Разработаны указания по структуре расчетной сетки для таких течений. В расчетах получена качественно правильная картина нестационарного и осредненного по времени течений. Однако скорость роста слоя смешения завышена в расчете в 1.5 раза по сравнению с экспериментальными данными. Повышение качества расчета требует использования более подробных сеток и трехмерной постановки задачи.

3. Возможности современных персональных компьютеров пока недостаточны для того, чтобы проводить расчеты турбулентных течений методом LES.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. -М., "Наука", 1989.
2. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. -М., ИЛ, 1955.
3. Smagorinsky J. Mon. Weather Rev., 1963, v.91, p.99.
4. Ферцигер Дж. Численное моделирование крупных вихрей для расчета турбулентных течений // Ракетная техника и космонавтика, 1977, т.15, №9.
5. Leslie D.C. Simulation for turbulent flows. Queen Mary College, London.
6. Ferziger Joel H. State of the Art in Subgrid-Scale Modeling.
7. Voke Peter R., Collins Michael W. Large-eddy simulation. Retrospect and prospect. Department of Mechanical Engineering, the City University, London, U.K. PCH Physico-Chemical Hydrodynamics, 1983, v.4, №2, p.119-161.
8. Philip J. Morris, Qunzhen Wang, Lyle N. Long & David P. Lockard Numerical Predictions of High Speed Jet Noise // The Pennsylvania State University. American Institute of Aeronautics and Astronautics, p.1-13.
9. Невлев В.М. Численное моделирование турбулентных течений. -М., "Наука", 1990.
10. Germano M. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. "Physics of fluids A", 1991, v.3, №7.
11. Bosniakov S., Fonov S., Jitenev V., Shenkin A., Vlasenko V., Yatskevich N. Method for Noise Suppressing Nozzle calculation and first results of its implementation // "Propulsion and power", 1998, v.14, №1, p.101-109.
12. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. -М., "Наука", 1976.
13. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностной схемы для расчета разрывных решений газовой динамики // "Ученые записки ЦАГИ", 1972, т.3, №6.
14. Родионов А.В. Монотонная схема 2-го порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1987, т.27, №4.
15. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К.Годунова. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1987, т.27, №12.
16. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics, 1983, v.49, №3.
17. Lele S.K. Compressibility effects on turbulence. Ann. Rev. Fluid Mech. 26:211-54, 1994.
18. Oran E.S., Boris J.P. Numerical simulations of asymmetric mixing in planar shear flows // Journal of Fluid Mechanics, 1986, v.165, p. 201-220.
19. Bosniakov S.M., Vlasenko V.V., Yatskevich N.S. Explicit numerical method for the simulation of 3D viscous turbulent flow in the noise suppressing nozzle. Proceedings of the 1st ISTC/TsAGI Joint Workshop "Ecological Aspects of the Impact of a Supersonic Civil Aircraft of the 2nd Generation on Environment", Russia, Zhukovskiy, 21-22 November, 1996.
20. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. -М., "Энергия", 1979.